Γραμμική Άλγεβρα

~~Αναλυτική Γεωμετρία~~

13/05/2019

Θεώρημα του Euler:

Έστω A ορθογώνιος 3×3 πίνακας πραγματικών αριθμών και: $|A|=1$. Θεωρούμε την αντίστοιχη ισομετρία $f_A: \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}_3$, $f_A(x)=AX$.
Αν $\{\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\} \overset{=}{B}$ είναι η συνήθης, ΟΚΒ, βάση του $\mathbb{R}_3$, τότε $M_B^B(f_A)=A$.

• $\boxed{\text{Ο πίνακας } A \text{, ισοδύναμα η ισομετρία } f_A \text{, έχει ως ιδιοτιμή το } \lambda=1.}$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι το $P_A(t)$, και $\deg P_A(t)=3$.
Άρα, ο πίνακας A έχει πάντα μία πραγματική ιδιοτιμή. Τότε γνωρίζουμε ότι $\lambda=\pm 1$. Θεωρούμε τις υπόλοιπες ιδιοτιμές του πίνακα A $\mu,\kappa \in \mathbb{C}$.

(α) Αν $\mu,\kappa\in\mathbb{R}$, τότε: $\mu=\pm1$, $\kappa=\pm1$. Επειδή $|A| = P_A(0) = \lambda\cdot\mu\cdot\kappa$ και επειδή $\lambda=\pm1$, $\mu=\pm1$, $\kappa=\pm1$, και επειδή $|A|=1$, έπεται ότι τουλάχιστον μία ιδιοτιμή, έστω η λ, είναι ίση με 1.

(β) Αν $\mu,\kappa\in\mathbb{C}$, τότε $\kappa=\bar{\mu}$, τότε θα έχουμε: $1=|A| = \lambda\cdot\mu\cdot\bar{\mu} = \lambda\cdot\underbrace{|\mu|^2}_{>0} \Longrightarrow \lambda=1$

• Έστω $\vec{e_1}'$ ιδιοδιάνυσμα του A, ή ισοδύναμα της ισομετρίας f_A, που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda=1$.
Έστω $\vec{e_1} = \dfrac{\vec{e_1}'}{\|\vec{e_1}'\|}$ το αντίστοιχο μοναδιαίο διάνυσμα και θέτουμε. V = ο υπόχωρος του $\mathbb{R}_3$ ο οποίος παράγεται από το $\vec{e_1}$.

Έστω ο ορθογώνιος υπόχωρος $V^\perp = \{\vec{x}\in\mathbb{R}_3 \mid \langle \vec{e_1}, \vec{x}\rangle = 0\}$ του V.
Τότε $\mathbb{R}_3 = V\oplus V^\perp$ και $\dim_{\mathbb{R}} V^\perp = 2$. Τότε, αν $\mathcal{C} = \{\vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ ΟΚΒ του $V^\perp$, έπεται ότι το σύνολο $B=\{\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\}$ ΟΚΒ του $\mathbb{R}_3$.

Ισχυρισμός: $\forall \vec{x}\in V^\perp$: $f_A(\vec{x})\in V^\perp$.
Πράγματι, $\forall \vec{x}\in V^\perp$ έχουμε $0 = \langle \vec{e_1}, \vec{x}\rangle \xlongequal{f_A \text{ ισομετρία}} \langle f_A(\vec{e_1}), f_A(\vec{x})\rangle = \langle \vec{e_1}, f_A(\vec{x})\rangle$, δηλαδή $\forall \vec{x}\in V^\perp$: $f_A(\vec{x}) \perp \vec{e_1}$ και άρα $f_A(\vec{x})\in V^\perp$. Άρα μπορούμε να ορίσουμε τον ενδομορφισμό $f_A' = f_A|_{V^\perp}: V^\perp \to V^\perp$, $f_A'(\vec{x}) = f_A(\vec{x})$.

Προφανώς ο ενδομορφισμός $f_A': V^\perp\to V^\perp$ είναι μια ισομετρία. Επομένως ο πίνακας $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f_A') \overset{\text{ορ.}}{=} B$ είναι ορθογώνιος.
Γνωρίζουμε τότε $\exists!\ \theta\in[0,2\pi)$ έτσι ώστε:

$$B = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Τότε ο πίνακας A της f_A στην ΟΚΒ θα είναι:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Οι πίνακες αυτοί είναι όμοιοι με τον A, διότι είναι οι πίνακες της f_A στις βάσεις $\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$ και άρα θα έχουν την ... ορίζουσα ίση με $|A|=1$.

Αυτό πρέπει να θυμάμαι!

Απόδειξη πρακτικά αχρείαστη.

$\boxed{\text{Θεώρημα Euler}}$: Έστω A ορθογώνιος 3×3 πίνακας με ορίζουσα $|A|=1$. Τότε, ο A έχει πάντα ιδιοτιμή το $\lambda=1$, και $\exists$ ΟΚΒ του $\mathbb{R}^3$, έστω ότι αυτή είναι η $\mathcal{D}$, έτσι ώστε ο πίνακας A να είναι όμοιος με τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

, όπου $\theta\in[0,2\pi)$ είναι μια μοναδική γωνία η οποία προσδιορίζεται από τον A.

Επιπλέον ο A παριστάνει στροφή επιπέδου (Π), γύρω από τον άξονα (ε) ο οποίος είναι κάθετος στο επίπεδο (Π), κατά γωνία θ.

Θέμα: Απόδειξη ότι 3×3 πίνακας αποτελεί στροφή

<u>Ο άξονας (ε)</u>: Είναι ο υπόχωρος V ο οποίος παράγεται από ένα ιδιοδιάνυσμα $\vec{\varepsilon_1}$ του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda=1$.

<u>Το επίπεδο (Π)</u>: Είναι ο υπόχωρος $V^{\perp}$.

<u>Η γωνία (θ)</u>: η μοναδική γωνία $\theta\in[0,2\pi)$: $\cos(\theta)=\dfrac{TrA-1}{2}$

<u>Ο ορθογώνιος πίνακας</u> P: ${}^tP\,A\,P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ είναι $P=(\vec{\varepsilon_1}\ \vec{\varepsilon_2}\ \vec{\varepsilon_3})$ και $\{\vec{\varepsilon_2},\vec{\varepsilon_3}\}$ ΟΚΒ του $V^{\perp}$.

<u>Παράδειγμα</u>

$$A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Να δειχθεί ότι ο A παριστάνει στροφή επιπέδου (Π), γύρω από άξονα (ε) ο οποίος είναι κάθετος στο (Π) κατά γωνία θ. Ακολούθως, να βρεθούν: (Π), (ε), θ ώστε και ορθογώνιος πίνακας P: ${}^tP\,A\,P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

Πινακες με καλές ιδιότητες ⟶ σύντομη περιγραφή

ι. Λύση. Εύκολα βλέπουμε ότι οι στήλες του A αποτελούν ΟΚΒ του χώρου των στηλών, και άρα ο A ορθογώνιος. Επιπλέον παρατηρούμε ότι $|A|=1$ και άρα μπορεί να εφαρμοστεί το Θεώρημα του Euler.

② Γνωρίζουμε ότι ο A έχει ως ιδιοτιμή το $\lambda=1$.

③ Ζητάμε $X\in\mathbb{R}_3$: $(A-I_3X)=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}-1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3}-1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (Σ)

Τότε $\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$ λύση του (Σ) $\Rightarrow$ το $\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{\varepsilon_1'}$: ~~ιδιοτιμή~~ ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην $\lambda=1$, και

τότε $\vec{\varepsilon_1} = \dfrac{\varepsilon_1'}{\|\varepsilon_1'\|} = \begin{pmatrix} \sqrt{11}/11 \\ \sqrt{11}/11 \\ 3\sqrt{11}/11 \end{pmatrix}$ Άρα ο άξονας περιστροφής είναι ο υπόχωρος V ο οποίος παράγεται από το $\vec{\varepsilon_1}$.

④ Έχουμε $\exists!\ \theta\in(0,2\pi)$: $\cos(\theta) = \dfrac{TrA-1}{2}$

⑤ Συμπληρώνουμε το $\vec{\varepsilon_1}$ σε μια ΟΚΒ $\mathcal{B}=\{\vec{\varepsilon_1},\vec{\varepsilon_2},\vec{\varepsilon_3}\}$ του $\mathbb{R}_3$ και τότε $V^{\perp}$ = ο υπόχωρος του $\mathbb{R}_3$ ο οποίος παράγεται από τα $\vec{\varepsilon_2},\vec{\varepsilon_3}$. [Πώς;]

Τότε $\vec{\varepsilon_2} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ και $\vec{\varepsilon_3} = \begin{pmatrix} -3\frac{\sqrt{22}}{22} \\ -3\frac{\sqrt{22}}{22} \\ 2\frac{\sqrt{22}}{22} \end{pmatrix}$ και είναι $(\Pi)=V^{\perp}$.

⑥ Θεωρούμε τον πίνακα $P=(\vec{\varepsilon_1}\ \vec{\varepsilon_2}\ \vec{\varepsilon_3}) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{11}}{11} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{3\sqrt{22}}{22} \\ \frac{\sqrt{11}}{11} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{3\sqrt{22}}{22} \\ \frac{3\sqrt{11}}{11} & 0 & \frac{2\sqrt{22}}{22} \end{pmatrix}$. Τότε ο P είναι ορθογώνιος και ${}^tP A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5/6 & \frac{\sqrt{11}}{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{11}}{6} & -5/6 \end{pmatrix}$

Άσκηση:

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

Να συμπληρωθεί ο A σε έναν ορθογώνιο 3x3 πίνακα με ορίζουσα $|A|=1$ και ακολούθως να προσδιορισθεί η γεωμετρική του ερμηνεία.

Υπόδειξη: Η $\Gamma_3 = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, -\frac{1}{3\sqrt{2}}, -\frac{4}{3\sqrt{2}} \right)$